Lois gaussiennes inverses généralisées et méthode de Stein

Essomanda Konzou

konzou16@gmail.com

Résumé

Ce cours présente d'une part la méthode de Stein pour l'approximation normale, qui en fait constitue le fondement de cette méthode, d'autre part, donne quelques outils mathématiques nécessaires à l'application de la méthode de Stein au cas où la loi cible est la loi gaussienne inverse généralisée, à savoir l'opérateur de Stein, la solution de l'équation différentielle correspondante et des bornes de cette solution. Les techniques utilisées dans la mise en place de ces outils sont essentiellement basées sur le fait que la loi gaussienne inverse généralisée appartient à la famille de lois de probabilité dont la densité g vérifie l'équation différentielle $(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x)$ avec s et τ des fonctions polynômes satisfaisant certaines conditions.

Mots clés : *Loi gaussienne inverse généralisée ; méthode de Stein.*

Abstract

This course presents on the one hand the Stein's method for normal approximation, which in principle is the basis of this method, and gives some mathematical tools necessary for the application of Stein's method to the case where the target law is the generalized inverse Gaussian distribution, such as the Stein's operator, the solution of the corresponding differential equation and the bounds of this solution, on the other hand. The techniques used to obtain these tools are essentially based on the fact that the generalized inverse Gaussian law belongs to the family of probability laws whose density g satisfies the differential equation $(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x)$ where s and τ are polynomial functions satisfying certain conditions.

Keywords : *Generalized inverse Gaussian distribution ; Stein's method.*

Table des matières

Chapitre 1

Fondements de la méthode de Stein

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement la méthode de Stein pour la loi normale standard, qui en fait constitue le fondement de cette méthode.

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (i.i.d.) telle que $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ et $Var(X_i) = \sigma^2$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. D'après le théorème central limite, $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge vers la loi normale standard.
La technique classique pour prouver le théorème central limite est de démontrer la convergence en distribution

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ lorsque } n \to \infty,$$

ce qui n'est pas difficile avec la condition i.i.d.
Cependant, dans les applications réelles, les variables aléatoires ne sont pas toujours indépendantes et de même loi, il faut donc un moyen plus sophistiqué pour déterminer la loi limite.
Stein en 1972 a trouvé une technique qui lui permet de prouver qu'une variable X a approximativement la loi normale standard en majorant la distance de Wasserstein entre X et Z avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Cette technique basée essentiellement sur la détermination d'un opérateur appelé opérateur de Stein, la résolution de l'équation différentielle correspondante, la majoration de la norme de la solution obtenue ainsi que celle de ses dérivées successives (si possible) permet non seulement de caractériser la loi cible, mais aussi de borner l'erreur commise dans l'approximation d'une loi de probabilité par la loi cible.

La méthode de Stein a été au fil du temps adaptée à plusieurs lois de probabilité ; ce qui rend assez dense la littérature concernant cette démarche. Par exemple, cette méthode a été développée pour les lois : de Poisson, loi exponentielle, loi gamma, variance-gamma, etc.

Nous présentons dans ce chapitre l'approximation par la méthode de Stein dans le cadre de la loi normale standard. Pour plus de détails voir [1, 7, 9, 11].

1.1 Approximation normale par la méthode de Stein

Les résultats qui suivent sont principalement tirés dans [1, 9].

1.1.1 Caractérisation

Dans toute la suite, $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ désigne la norme de la convergence uniforme.

Théorème 1.1.1. *Soit h une fonction réelle continue et bornée et Z une variable aléatoire de loi normale standard. Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite si et seulement si, pour toute fonction dérivable f telle que $\mathbb{E}\,|f'(Z)| < \infty$,*

$$\mathbb{E}\left[f'(X) - Xf(X)\right] = 0. \tag{1.1.1}$$

L'équation différentielle de Stein correspondante est

$$f'(x) - xf(x) = h(x) - \mathbb{E}h(Z) \tag{1.1.2}$$

et l'opérateur de Stein correspondant est $f \mapsto (T_f)(x) = f'(x) - xf(x)$.
On remarque que si f_h est la solution de l'équation différentielle (1.1.2), alors pour toute variable aléatoire X,

$$\left|\mathbb{E}\left[f_h'(X) - Xf_h(X)\right]\right| = \left|\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(Z)\right|.$$

Donc si l'on veut majorer $|\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(Z)|$ pour h donné, une manière adéquate de procéder est de majorer le premier membre de l'équation précédente, ce qui nécessite éventuellement de borner la solution f_h de l'équation de Stein (1.1.2) ainsi que certaines de ses dérivées successives si nécessaire, et c'est l'une des étapes cruciales dans l'approximation par la méthode de Stein.
Le lemme suivant donne la solution de l'équation de Stein (1.1.2) ainsi qu'un majorant de la norme de cette solution et celle de ses deux premières dérivées.

Lemme 1.1.1. *1. L'unique solution bornée de l'équation différentielle (1.1.2) est donnée par*

$$\begin{aligned} f_h(w) &= e^{w^2/2} \int_{-\infty}^{w} e^{-t^2/2} \left(h(t) - \mathbb{E}h(Z)\right) dt \\ &= -e^{w^2/2} \int_{w}^{+\infty} e^{-t^2/2} \left(h(t) - \mathbb{E}h(Z)\right) dt. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

2. Si h est fonction lipschitzienne, alors

$$||f_h|| \leq ||h'||; \quad ||f_h'|| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,||h'||; \quad ||f_h''|| \leq 2\,||h'||.$$

1.1.2 Distance de Wasserstein entre une variable aléatoire quelconque et une variable suivant la loi normale centrée réduite

Rappelons que si X et Y sont deux variables aléatoires, une évaluation de la distance probabiliste entre X et Y est donnée par :

$$d_{\mathcal{H}}(X,Y) = \sup_{h\in\mathcal{H}} \left|\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(Y))\right|$$

où $\mathcal{H}$ est une famille de fonctions tests. Si l'ensemble des fonctions tests est formé des fonctions 1-lipschitziennes (dans ce cas $\|h'\| \leq 1$), on obtient la distance de Wasserstein d_{Wass}. Soit

$$\mathcal{F} = \left\{ f : ||f|| \leq 1; \quad ||f'|| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \quad ||f''|| \leq 2 \right\}.$$

D'après le *2.* du lemme 1.1.1, on déduit que si X est une variable aléatoire et Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors

$$\begin{aligned} d_{Wass}(X,Z) = \sup_{h\in\mathcal{H}} \left|\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(Z))\right| &= \sup_{h\in\mathcal{H}} \left|\mathbb{E}[f_h'(X) - Xf_h(X)]\right| \\ &\leq \sup_{f\in\mathcal{F}} \left|\mathbb{E}[f'(X) - Xf(X)]\right|. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

En application, il suffit de majorer $\left|\mathbb{E}[f_h'(X) - Xf_h(X)]\right|$ pour majorer d_{Wass}.

1.2 Exemple d'application : Somme de variables aléatoires indépendantes

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de moyenne 0 telle que, pour tout i, $\mathbb{E}|X_i|^3 < +\infty$, $\mathbb{E}|X_i|^4 < \infty$ et $\mathbb{E}X_i^2 = 1$. Posons $W_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. La suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite et la vitesse de convergence est de l'ordre de $n^{-1/2}$. En effet, par l'approche de Stein, on a :

Théorème 1.2.1. *Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. La distance de Wasserstein entre W_n et Z est telle que*

$$d_{Wass}(W_n, Z) \leq \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^3 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E} X_i^4}. \tag{1.2.1}$$

Conclusion

Les principales étapes de l'approximation par la méthode de Stein peuvent être schématisées comme suit

Théorème de Caractérisation

$\Downarrow$

Équation différentielle de Stein

$\Downarrow$

Solution f_h de l'équation différentielle

$\Downarrow$

Bornes de f_h, $f_h^{(n)}$

$\Downarrow$

Majoration d'une distance probabiliste

Chapitre 2

Méthode de Stein pour la loi gaussienne inverse généralisée

Dans ce chapitre, la loi gaussiennes inverses généralisées (GIG) est considérée dans le contexte de la méthode de Stein. Nous établissons les outils mathématiques nécessaires pour l'application de la méthode de Stein dans le cas où la loi cible est la loi GIG. Il s'agit précisément de donner l'opérateur de Stein de cette loi, la solution de l'équation différentielle correspondante, et établir des bornes de cette solutions. Les bornes des dérivées successives être consultées dans [4, 6].

Les techniques que nous allons développées pour borner la solution de l'équation de Stein de la loi GIG sont basées sur le fait que la loi gaussienne inverse généralisée est contenue dans la famille des lois de probabilité dont la densité g vérifie l'équation différentielle

$$(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x) \tag{2.0.1}$$

avec s et τ des fonctions polynômiales. Nous obtenons dans la section 1 une extension du résultat de Schoutens pour les lois de probabilités dont la densité vérifie l'équation (2.0.1) avec des conditions plus faibles sur τ. Nous utilisons l'opérateur de Stein donné dans [10] et développé dans [8]. Nous appliquons le résultat obtenu pour borner la solution de l'équation de Stein des lois de probabilité dont la densité satisfait (2.0.1) pour une classe de fonctions τ donnée incluant la loi GIG.
Döbler [2], dans l'étude de la méthode de Stein pour la loi bêta a aussi établi des bornes de la solution de l'équation de Stein pour les lois de probabilité dont la densité g vérifie (2.0.1). Dans la section 2, nous développons les travaux de Döbler dans le cas où τ est un polynôme convexe de second degré (ce qui est le cas pour la loi GIG). Ce qui permet d'obtenir une nouvelle borne de la solution de l'équation de Stein des lois de probabilité dont la densité satisfait (2.0.1). Cette borne se révèle optimale pour les fonctions tests lipschitziennes.
Nous appliquons les résultats des sections 1 et 2 à la loi GIG pour fournir un majorant explicite de la norme de la solution de l'équation de Stein de cette loi.

Les détails des résultats de ce chapitre peuvent être consultés dans [3, 4, 5]

2.1 Extension des travaux de Schoutens sur la borne de la solution de l'équation de Stein

Le théorème 1 dans [10] établit une caractérisation de Stein pour les lois de probabilité dont la densité vérifie l'équation (2.0.1) où s et τ sont des fonctions polynômiales, et démontre que l'opérateur de Stein dans ce cas est $f \mapsto sf' + \tau f$. Nous avions réalisé (voir le théorème suivant) que cet opérateur peut être obtenu en utilisant l'approche par densité donnée dans [8] et [10].

Théorème 2.1.1. *Considérons une densité de probabilité g sur $(0, \infty)$ satisfaisant (2.0.1) pour des fonctions polynômiales s et τ. Alors g est la densité de probabilité d'une variable aléatoire positive X si et seulement si pour toute fonction différentiable f telle que*
$\lim\limits_{x\to 0} s(x)g(x)f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} s(x)g(x)f(x) = 0$, *on a*

$$\mathbb{E}\left[s(X)f'(X) + \tau(X)f(X)\right] = 0. \tag{2.1.1}$$

Le théorème 2.1.1 montre que l'équation de Stein correspondant à toute densité de probabilité g vérifiant (2.0.1) est de la forme

$$s(x)f'(x) + \tau(x)f(x) = h(x) - \mathbb{E}h(W) \tag{2.1.2}$$

avec W une variable aléatoire de densité g et h une fonction absolument continue et bornée.

Proposition 2.1.1. *Soit $g > 0$ une densité de probabilité définie sur $(0, +\infty)$ et satisfaisant la relation (2.0.1), pour des fonctions polynômiales s et τ. Alors une solution f_h de l'équation de Stein (2.1.2) est donnée par*

$$\begin{aligned} f_h(x) &= \frac{1}{s(x)g(x)} \int_0^x g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt \\ &= \frac{-1}{s(x)g(x)} \int_x^{+\infty} g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Les propositions suivantes montrent que la solution f_h donnée par (2.1.3) est bornée si h est bornée, et f_h est la seule solution bornée de l'équation de Stein correspondant à la densité g.

Proposition 2.1.2 (proposition 2.5.1. Konzou *et al.* [4]). *Soit $g > 0$ une densité de probabilité définie sur $(0, +\infty)$ et satisfaisant la relation (2.0.1) avec s une fonction polynômiale telle que $s > 0$ sur $(0, +\infty)$ et τ une fonction polynomiale décroissante, admettant une seule racine α sur $(0, +\infty)$. Supposons que $\lim_{x\to 0} s(x)g(x) = \lim_{x\to+\infty} s(x)g(x) = 0$. Si h est une fonction continue et bornée, alors*

$$\|f_h\| \leq M \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \tag{2.1.4}$$

avec

$$M = \max\left(\frac{1}{s(\alpha)g(\alpha)} \int_0^\alpha g(t)dt; \ \frac{1}{s(\alpha)g(\alpha)} \int_\alpha^{+\infty} g(t)dt\right),$$

et W une variable aléatoire de densité g.

Proposition 2.1.3 (proposition 2.5.2 Konzou *et al.* [4]). *Soit $g > 0$ une densité de probabilité définie sur $(0, \infty)$ et vérifiant $(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x)$ pour des fonctions polynômes s et τ avec $s > 0$ sur $(0, \infty)$. Supposons que $\lim_{t\to 0} s(t)g(t) = \lim_{t\to\infty} s(t)g(t) = 0$. Supposons en outre que $\tau(0) > 0$ et qu'il existe $\beta > 0$ tel que τ est croissante sur $(0, \beta]$, décroissante sur $[\beta, \infty)$ et admet une et une seule racine α sur $[\beta, \infty)$. Si h une fonction continue et bornée, alors*

$$||f_h|| \leq M_0 \, ||h(.) - \mathbb{E}h(W)|| \,, \tag{2.1.5}$$

avec

$$M_0 = \max\left(\frac{1}{\tau(0)}; \ \frac{1}{s(\beta)g(\beta)}\right).$$

2.2 Borne de Döbler de la solution f_h de l'équation de Stein

2.2.1 Résultats de Döbler

Döbler dans [2] a établi des bornes de la solution (2.1.3) de l'équation de Stein (2.1.2) dans un contexte assez général. Les résultats de Döbler reposent sur la condition suivante vérifiée par la densité g.

Condition A : g est positive sur $(0, \infty)$ et il existe des fonctions dérivables s et τ sur $(0, \infty)$, avec s positive, $\lim_{x\to 0} s(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} s(x)g(x) = 0$ et, pour tout $x > 0$,

$$(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x).$$

Proposition 2.2.1 (proposition 3.13 dans [2]). *Soit W une variable aléatoire dont la densité de probabilité g satisfait la **condition A**, et de fonction de répartition F, telle que $\mathbb{E}(W) < \infty$. Soit f_h la solution de l'équation de Stein (2.1.2) donnée par (2.1.3). Pour toute fonction test h, lipschitzienne,*

$$|f_h(x)| \leq \|h'\| \frac{F(x)\mathbb{E}(W) - \int_0^x yg(y)dy}{s(x)g(x)} = \|h'\| \frac{\int_0^x \left(\mathbb{E}(W) - yg(y)\right) dy}{s(x)g(x)}. \tag{2.2.1}$$

2.2.2 Borne de la solution de l'équation de Stein

Théorème 2.2.1 (théorème 3.1 Konzou *et al.* [5]). *Considérons une densité de probabilité g définie sur $(0,\infty)$ satisfaisant la* **condition A** *pour des fonctions s et τ, où τ un polynôme de second degré de la forme*

$$\tau(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{2.2.2}$$

avec $a_2 < 0$ et $a_0 > 0$. Soit f_h la solution de l'équation de Stein (2.1.2) définie par (2.1.3). Pour toute fonction test h, lipschitzienne,

$$\|f_h\| \leq \frac{\mathbb{E}(W)}{a_0}\|h'\| \tag{2.2.3}$$

où W est une variable aléatoire de densité g.

2.3 Sur la caractérisation et l'équation de Stein pour la loi gaussienne inverse généralisée

2.3.1 Caractérisation

Rappelons que la densité de la loi GIG de paramètres $p \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ est

$$g_{p,a,b}(x) = \frac{(a/b)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{ab})}x^{p-1}e^{-\frac{1}{2}(ax+b/x)}, \quad x > 0, \tag{2.3.1}$$

où K_p est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce.
Soit

$$s(x) = x^2 \quad \text{et} \quad \tau_{p,a,b}(x) = \frac{b}{2} + (p+1)x - \frac{a}{2}x^2. \tag{2.3.2}$$

Alors par un simple calcul, on déduit que la densité $g_{p,a,b}$ satisfait

$$(s(x)g_{p,a,b}(x))' = \tau_{p,a,b}(x)g_{p,a,b}(x). \tag{2.3.3}$$

Cette dernière observation permet d'appliquer le théorème 2.1.1 pour obtenir la caractérisation suivante de Stein de la loi GIG :

Théorème 2.3.1. *Une variable aléatoire X suit la loi GIG de densité $g_{p,a,b}$ si et seulement si, pour toute fonction réelle f d'une variable réelle positive, dérivable telle que $\lim_{x\to\infty} g_{p,a,b}(x)f(x) = \lim_{x\to 0} g_{p,a,b}(x)f(x) = 0$, et telle que l'espérance suivante existe, on a :*

$$\mathbb{E}\left[X^2f'(X) + \left(\frac{b}{2} + (p+1)X - \frac{a}{2}X^2\right)f(X)\right] = 0. \tag{2.3.4}$$

L'équation différentielle de Stein correspondante est alors

$$x^2f'(x) + \left(\frac{b}{2} + (p+1)x - \frac{a}{2}x^2\right)f(x) = h(x) - \mathbb{E}h(W) \tag{2.3.5}$$

où h est une fonction bornée et W une variable aléatoire suivant la loi GIG de paramètres p, a, b.

Proposition 2.3.1. *La solution bornée de l'équation de Stein (2.3.5) de la loi GIG est donnée par*

$$\begin{aligned} f_h(x) =& \frac{1}{s(x)g_{p,a,b}(x)}\int_0^x g_{p,a,b}(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right]dt \\ =& \frac{-1}{s(x)g_{p,a,b}(x)}\int_x^{+\infty} g_{p,a,b}(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right]dt \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

où h est une fonction bornée et W une variable aléatoire suivant la loi GIG de paramètres p, a, b.

2.3.2 Un majorant de la norme de la solution de l'équation de Stein de la loi GIG

Nous appliquons ici les résultats des sections 1 et 2 à la solution de l'équation de Stein de la loi GIG.

Théorème 2.3.2 (théorème 3.2 Konzou *et al.* [4]). *Si h est une fonction continue et bornée, alors pour $p \leq -1$, la fonction f_h définie par (2.3.6) est bornée et on a :*

$$||f_h|| \leq N \, ||h(.) - \mathbb{E}h(W)|| \tag{2.3.7}$$

où

$$N = \max \left(\frac{1}{\alpha^2 g_{p,a,b}(\alpha)} \int_0^{\alpha} g_{p,a,b}(t)dt ; \frac{1}{\alpha^2 g_{p,a,b}(\alpha)} \int_{\alpha}^{+\infty} g_{p,a,b}(t)dt \right)$$

et

$$\alpha = \frac{p+1+\sqrt{(p+1)^2+ab}}{a}. \tag{2.3.8}$$

Théorème 2.3.3 (théorème 3.5 Konzou *et al.* [4]). *Considérons $p > -1$, $a > 0$, $b > 0$ et α défini par (2.3.8). Soit $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. La solution f_h donnée par (2.3.6) de l'équation de Stein de la loi $GIG(p, a, b)$ de densité $g_{p,a,b}$ est telle que*

$$\|f_h\| \leq \max \left(\frac{2}{b}, \frac{a^2}{(p+1)^2 g_{p,a,b}(\frac{p+1}{a})} \right) \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| .$$

En appliquant le théorème 2.2.1, on obtient la borne suivante de la solution de l'équation de Stein pour la loi GIG.

Théorème 2.3.4 (théorème 5.1 Konzou *et al.* [5]). *Soit $p \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Soit f_h la solution de l'équation de Stein de la loi GIG définie par l'équation (2.3.6). Pour toute fonction test h, lipschitzienne,*

$$\|f_h\| \leq \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{K_{p+1}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})} \|h'\| . \tag{2.3.9}$$

2.4 Une application : convergence de loi hyperbolique généralisée vers la loi GIG

Une borne de la vitesse de convergence d'une suite de variables aléatoires de loi hyperbolique généralisée vers la loi GIG est établie dans [6].

Conclusion

Approcher la loi d'une variable aléatoire X par la loi gaussienne inverse généralisée par la méthode de Stein consiste à déterminer un majorant adéquat de :

$$\left| \mathbb{E} \left[X^2 f'(X) + \left(\frac{b}{2} + (p+1)X - \frac{a}{2} X^2 \right) f(X) \right] \right| ,$$

où f est la solution de l'équation de Stein correspondant à la loi cible. Cette approche fait appel aux bornes de la solution de l'équation différentielle de Stein correspondante et (éventuellement) celles de ses dérivées successives.

Bibliographie

[1] L. H. Y. Chen, L. Goldstein, and Q-M. Shao, *Normal approximation by stein's method*, Probability and its Applications (New York). Springer, Heidelberg, 2011, MR2732624.

[2] C. Döbler, *Stein's method of exchangeable pairs for the beta distribution and generalizations*, Electron. J. Probab. **20** (2015), no. 109, 34 pp, MR3418541.

[3] E. Konzou, *Lois gaussiennes inverses (généralisées), lois de Kummer et méthode de Stein*, Theses, Université de Lorraine ; Université de Lomé (Togo), November 2020.

[4] E. Konzou and A. E. Koudou, *About the stein equation for the generalized inverse gaussian and kummer distributions*, ESAIM Probab. Stat. **24** (2020), 607–626, MR4170177.

[5] E. Konzou, E. Koudou, and K. E. Gneyou, *New bounds for the solution and derivatives of the stein equation for the generalized inverse gaussian and kummer distributions*, Bull. Belgian Math. Soc. (2020), accepté pour publication.

[6] ______, *Stein's method in two limit theorems involving the generalized inverse gaussian distribution*, Afrika Statistika (2021), accepté pour publication.

[7] C. Ley, G. Reinert, and Y. Swan, *Stein's method for comparison of univariate distributions*, Probab. Surv. **14** (2017), 1–52, MR3595350.

[8] C. Ley and Y. Swan, *Stein's density approach and information inequalities*, Electron. Commun. Probab. **18** (2013), no. 7, 1–14, MR3019670.

[9] N. Ross, *Fundamentals of stein's method*, Probab. Surv. **8** (2011), 210–293, MR2861132.

[10] W. Schoutens, *Orthogonal polynomials in stein's method*, J. Math. Anal. Appl. **253** (2001), no. 2, 515–531, MR1808151.

[11] C. Stein, *A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley : University of California Press **2** (1972), 583–602, MR0402873.